UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 6
Soluciones
Gustavo Lau
2021-06-19

Definiciones

Definición de relación reflexiva.

$$R \text{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A \ ((a,a) \in R)$$

Definición de relación transitiva.

$$R \text{ es transitiva en } A \equiv \forall a,b,c \in A \ ((a,b) \in R \land (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

Definición de relación antisimétrica.

$$R \text{ es antisimétrica en } A \equiv \forall a,b \in A \ ((a,b) \in R \land (b,a) \in R \implies a = b)$$

Definición de restricciones. Para denotar al subconjunto de R cuyas primeras coordenadas están en el conjunto C se usa la notación $R|_{izq}(C)$. Esto es

$$R|_{izq}(C) = \{(a,b) \in R : a \in C\}$$

Para denotar al subconjunto de R cuyas segundas coordenadas están en el conjunto C se usa la notación $R|_{der}(C)$. Esto es

$$R|_{der}(C) = \{(a,b) \in R : b \in C\}$$

1. Sean

$$R = \{(a,b),(b,c),(d,b),(e,a),(a,a),(e,e)\}$$
$$S = \{(c,c),(d,b),(e,f),(f,b),(c,d),(a,c)\}$$
$$C = \{a,c,f\}$$

Determine:

a) $R \circ S$ y $S \circ R$

b) $R|_{izq}(C)$ y $R|_{der}(C)$

Respuesta

a) Para recordar el orden de la composición de relaciones ayuda recordar que es el mismo orden que al componer funciones: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$R \circ S = \{(d,c),(f,c),(c,b)\}$$
$$S \circ R = \{(b,c),(b,d),(e,c),(a,c),(e,f)\}$$

b)

$$R|_{izq}(C) = \{(a,b),(a,a)\}$$
$$R|_{der}(C) = \{(b,c),(e,a),(a,a)\}$$

2. Sean A y B dos conjuntos, R una relación. Demuestre que $R|_{izq}(A-B) = R|_{izq}(A) - R|_{izq}(B)$.

Respuesta

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in R|_{izq}(A-B) \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de } R|_{izq} \rangle \\
& (x,y) \in R \wedge x \in A - B \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de diferencia de conjuntos} \rangle \\
& (x,y) \in R \wedge x \in A \wedge x \notin B \\
\equiv \quad & \langle p \equiv p \wedge p \text{ , conmutatividad y asociatividad de } \wedge \rangle \\
& ((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge ((x,y) \in R \wedge x \notin B) \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de } R|_{izq} \rangle \\
& (x,y) \in R|_{izq}(A) \wedge (x,y) \notin R|_{izq}(B) \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de diferencia de conjuntos} \rangle \\
& (x,y) \in R|_{izq}(A) - R|_{izq}(B) \\
& \langle \text{axioma de extensión} \rangle \\
& \therefore R|_{izq}(A-B) = R|_{izq}(A) - R|_{izq}(B)
\end{aligned}$$

3. **Definición de dominio de una relación.** El dominio de una relación R es

$$Dom(R) = \{x | (\exists y | (x, y) \in R)\}$$

Sean A y B dos conjuntos, R una relación. Demuestre que si $A, B \subseteq Dom(R)$ y $A \subset B$ entonces $R|_{izq}(A) \subset R|_{izq}(B)$.

Respuesta

Supongamos que $A, B \subseteq Dom(R)$ y $A \subset B$.

$$\begin{array}{l}
\quad (x, y) \in R|_{izq}(A) \\
\equiv \quad \langle \text{definición de } R|_{izq} \rangle \\
\quad (x, y) \in R \land x \in A \\
\implies \langle A \subset B \rangle \\
\quad (x, y) \in R \land x \in B \\
\equiv \quad \langle \text{definición de } R|_{izq} \rangle \\
\quad (x, y) \in R|_{izq}(B) \\
\langle \text{definición de subconjunto} \rangle \\
\therefore R|_{izq}(A) \subseteq R|_{izq}(B)
\end{array}$$

Por otra parte:

$$\begin{array}{l}
\quad A \subset B \\
\implies \langle \text{definición de } \subset \rangle \\
\quad \exists x | x \in B \land x \notin A \\
\implies \langle B \subseteq Dom(R) \rangle \\
\quad \exists x | x \in Dom(R) \land x \in B \land x \notin A \\
\implies \langle \text{definición de } Dom(R) \rangle \\
\quad \exists (x, y) \in R | x \in B \land x \notin A \\
\equiv \quad \langle \text{definición de } R|_{izq} \rangle \\
\quad \exists (x, y) \in R | (x, y) \in R|_{izq}(B) \land (x, y) \notin R|_{izq}(A) \\
\therefore R|_{izq}(A) \neq R|_{izq}(B)
\end{array}$$

$$\therefore R|_{izq}(A) \subset R|_{izq}(B)$$

$$\therefore A, B \subseteq Dom(R) \land A \subset B \implies R|_{izq}(A) \subset R|_{izq}(B)$$

4. **Definición de relación simétrica.**

$$R \text{ es simétrica en } A \equiv \forall a, b \in A\ ((a,b) \in R \implies (b,a) \in R)$$

Definición de composición de relaciones. La composición de dos relaciones R y S es

$$R \circ S = \{(a,c) | (\exists b | : (a,b) \in S \land (b,c) \in R)\}$$

Sean R y S dos relaciones sobre A. Muestre un contraejemplo para el siguiente planteamiento: Si R y S son simétricas en A entonces $R \circ S$ es simétrica en A.

Respuesta

Contraejemplo:

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3\} \\ R &= \{(1,2),(2,1)\} \\ S &= \{(2,3),(3,2)\} \\ R \circ S &= \{(3,1)\} \end{aligned}$$

R y S son simétricas en A pero $R \circ S$ no lo es.

5. **Definiciones:**

$$\begin{aligned} Maxs(B) &= \{x \in B : (\nexists b \in B)(x < b)\} \\ Mins(B) &= \{x \in B : (\nexists b \in B)(b < x)\} \\ max(B) = x &\iff (x \in B) \land (\forall b \in B(b \le x)) \\ min(B) = x &\iff (x \in B) \land (\forall b \in B(x \le b)) \\ cotsup(B) &= \{x \in A : (\forall b \in B)(b \le x)\} \\ cotinf(B) &= \{x \in A : (\forall b \in B)(x \le b)\} \\ sup(B) &= min(cotsup(B)) \\ inf(B) &= max(cotinf(B)) \end{aligned}$$

Definición de dominio de una relación. El dominio de una relación R es

$$Dom(R) = \{x | (\exists y | (x,y) \in R)\}$$

Definición de rango de una relación. El rango de una relación R es

$$Rgo(R) = \{y | (\exists x | (x,y) \in R)\}$$

Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le 12\}$ se define la relación "a es divisor de b" como

$$a | b \iff (\exists k | k \in \mathbb{N} : b = k \times a)$$

a) Dibuje el diagrama de Hasse del CPO $\langle A, | \rangle$.

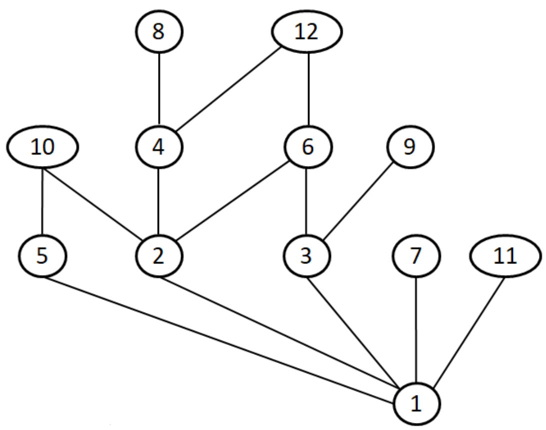
b) Dado $B = \{2,3,4,6\}$ halle $cotsup(B), cotinf(B), sup(B), inf(B), Maxs(B), Mins(B)$.

c) Dado $C = \{8,11\}$ halle $max(C), min(C), sup(C), inf(C)$.

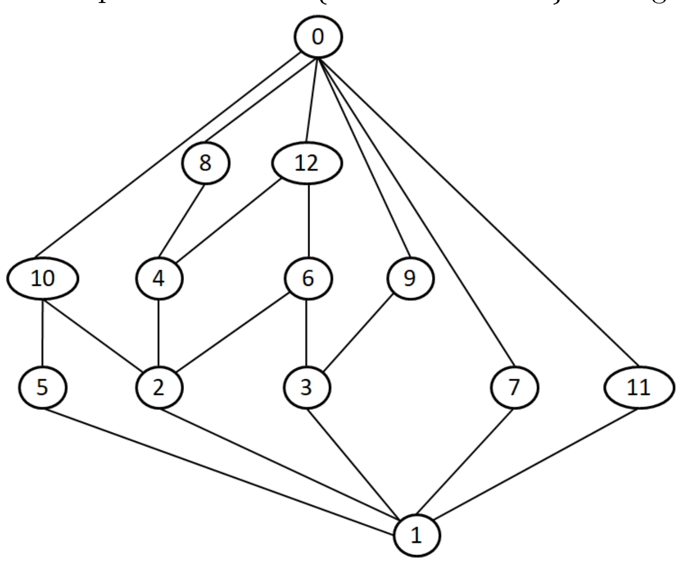
d) Dado $D = \{4,7\}$ halle $R|_{izq}(D)$, $Rgo(R|_{izq}(D)), R|_{der}(D)$ y $Dom(R|_{der}(D))$, con R la relación “es divisor de”.

Respuesta

a)



Notar que si fuera $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 12\}$ el diagrama sería:



b)

$$
\begin{aligned}
&B = \{2,3,4,6\}\\
&cotsup(B) = \{12\}\\
&cotinf(B) = \{1\}\\
&sup(B) = 12\\
&inf(B) = 1\\
&Maxs(B) = \{4,6\}\\
&Mins(B) = \{2,3\}
\end{aligned}
$$

c)

$$C = \{8, 11\}$$
C no tiene máximo.
C no tiene mínimo.
C no tiene supremo ya que no tiene cotas superiores.
$inf(C) = 1$

d)

$$D = \{4, 7\}$$
$$R|_{izq}(D) = \{(4,4), (4,8), (4,12), (7,7)\}$$
$$Rgo(R|_{izq}(D)) = \{4, 7, 8, 12\}$$
$$R|_{der}(D) = \{(1,4), (2,4), (4,4), (1,7), (7,7)\}$$
$$Dom(R|_{der}(D)) = \{1, 2, 4, 7\}$$

6. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : x|60\}$, el conjunto de los x que dividen a 60, siendo | la relación definida en el ejercicio 5.

   a) Dibuje el diagrama de Hasse de $\langle A, |\rangle$.

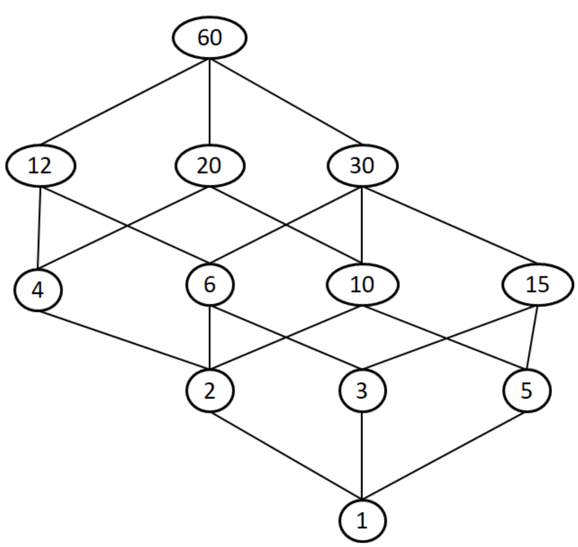
   b) Dado $B = \{2, 4, 10, 12, 20\}$ halle $Maxs(B)$, $Mins(B)$, $max(B)$, $min(B)$, $cotsup(B)$, $cotinf(B)$, $sup(B)$, $inf(B)$.

   c) Dado $C = \{4, 10, 20\}$, halle $Sup(C), inf(C), cotsup(C)$.

   d) Dado $C = \{4, 10, 20\}$, halle $R|_{izq}(C), Rgo(R|_{izq}(C)), R|_{der}(C)$ y $Dom(R|_{der}(C))$, con R la relación "es divisor de".

Respuesta

a)



b)

$$
\begin{aligned}
&B = \{2, 4, 10, 12, 20\} \\
&Maxs(B) = \{12, 20\} \\
&Mins(B) = \{2\} \\
&B \text{ no tiene máximo.} \\
&min(B) = 2 \\
&cotsup(B) = \{60\} \\
&cotinf(B) = \{1, 2\} \\
&sup(B) = 60 \\
&inf(B) = 2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&C = \{4, 10, 20\} \\
&sup(C) = 20 \\
&inf(C) = 2 \\
&cotsup(C) = \{20, 60\}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&C = \{4, 10, 20\} \\
&R|_{izq}(C) = \{(4,4), (4,12), (4,20), (4,60), (10,10), (10,20), (10,30), \\
&\qquad\qquad (10,60), (20,20), (20,60)\} \\
&Rgo(R|_{izq}(C)) = \{(12, 20, 30, 60\} \\
&R|_{der}(C) = \{(1,4), (2,4), (4,4), (1,10), (2,10), (5,10), (10,10), \\
&\qquad\qquad (1,20), (2,20), (5,20), (5,10), (4,20), (10,20), (20,20)\} \\
&Dom(R|_{der}(C)) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}
\end{aligned}
$$

7. Considere un conjunto C, no vacío, subconjunto de $\mathbb{N} - \{0\}$. Pruebe que $\langle C, | \rangle$ es un CPO.

Respuesta

Hay que demostrar que $|$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Todo número es divisor de si mismo ($n = 1 \times n$), por lo tanto $|$ es reflexiva.

Si $m|n$ y $n|m$ entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $n = pm$ y $m = qn$. Entonces $n = pqn$ y, como $n \neq 0$, tenemos $1 = pq$ y $p = q = 1$. Por lo tanto, $m = n$. Por lo tanto $|$ es antisimétrica.

Si $m|n$ y $n|r$ entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $n = pm$ y $r = qn$. Entonces $r = (pq)m$ y $m|r$. Por lo tanto $|$ es transitiva.

8. **Definición de Ordenamiento Topológico.** Un ordenamiento topológico de un CPO $\langle A, R\rangle$ es una relación de orden total sobre A que preserva (contiene) los elementos de R. En otras palabras, T es un ordenamiento topológico de un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, R\rangle$ si y solo si $T \in \mathcal{L}(A) \land R \subseteq T$.

   $\mathcal{L}(A)$ = conjunto de todos los ordenes totales (lineales) que se pueden construir sobre A.

   Tomando $\varnothing \subset C \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$. Demuestre que $\langle C, R\rangle$, donde $R = \{(m,n) \in C \times C : m \leq n\}$ es un orden topológico de C respecto a $|$. Observación: la proposición es falsa si 0 es elemento de C.

   Respuesta

   Como para todo m, n es verdad que $m \leq n$ o $n \leq m$ todo par de elementos es comparable y R es un orden total. Lo que falta demostrar es que $| \subseteq R$, es decir que $m|n \implies m \leq n$.

$$
\begin{aligned}
& m|n \\
\implies & \langle \text{definición de } | \rangle \\
& (\exists k : k \in \mathbb{N} : n = k \times m) \\
\implies & \langle m, n > 0 \rangle \\
& m \leq n
\end{aligned}
$$

9. Sean $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y R una relación sobre A donde

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, e), (a, c), (b, c), (b, b), (c, c), (d, e),$$

$$(d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (e, c), (e, e), (f, e), (f, c), (f, f)\}$$

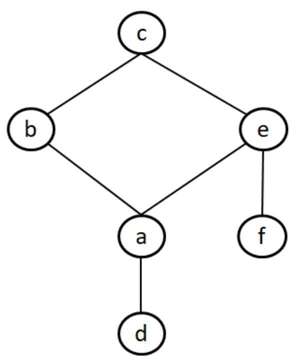
a) Dibuje el diagrama de Hasse de $\langle A, R \rangle$.

b) Obtenga la matriz de la relación R.

c) Ordene topológicamente el CPO $\langle A, R \rangle$.

Respuesta

a)



b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) d, a, f, b, e, c